時空の量子位相構造に基づく統一場理論：カルツァ＝クライン・ソリトンとトーションからの幾何学的枠組み

BTTP*

2026 年 7 月 5 日（v2.1；v1：2025 年 5 月 2 日）

概要

本稿では、四つの基本相互作用、暗黒物質、そしてブラックホールに代わる地平面なしの天体が、トーションを備えた単一の高次元作用から生じるという幾何学的枠組みを提案する。ゲージ場はコンパクトな内部空間の等長変換として実現されるため、ゲージ不変性は仮定ではなく定理として成立する。パリティの破れは、Holst 型項と非最小フェルミオン結合の相互作用を通して幾何学的に符号化され、パリティ非保存パラメータには $\chi - 1 \propto \alpha/\beta$ という幾何学的起源が与えられる。われわれは、Bah と Heidmann の滑らかな地平面なしトポロジカル星が完全作用の厳密解であることを示すトーション分離補題を証明し、それによって、シャドウ、準固有振動スペクトル、安定性に関する既存の広範な現象論を、統一幾何の枠組みの中に埋め込む。この現象論に加えて、光子キャビティ横断時間を解析的に扱い、$b = r_B/r_S$ として、閉形式近似 $\Delta t_{\rm echo} \simeq 11.7\,(GM/c^3)\sqrt{(3/2-b)/(b-1)}$ を得る。これは、既発表の準固有振動計算で見いだされたキャビティ効果と整合し、一般的なソリトンが明確に分離したエコーではなくリングダウン・スペクトルの摂動を生むことを示す。同じ質量のブラックホールに対してシャドウ直径が 33–43% 小さくなるという欠損は、イベント・ホライズン・テレスコープ観測と合わせると、M87*および Sgr A*がこのクラスのソリトンである可能性を排除する。一方で、未撮像のコンパクト天体には候補性を残す。滑らかさ条件と衝突型加速器による制限を同時に課すと、滑らかなソリトンは微視的でなければならず、$10^{-23}\,M_\odot$ 付近の暗黒物質候補が得られる。この候補は構成上マイクロレンズ観測には不可視である。同時に、天体質量の模倣天体に対してはサイズ階層の緊張が露呈するため、これを明示する。本枠組みは完成した万物理論ではなく、反証可能な研究プログラムとして提示される。先行研究との関係、確認済みの排除、生き残るパラメータ領域、未解決問題を整理する。

1 序論

1.1 背景と先行研究との関係

現代物理学は、四つの基本相互作用の統一的理解、ブラックホール情報パラドックス、暗黒物質と暗黒エネルギーの本質という課題に直面している。近年、Lindgren ら [1] は電磁気を純粋に幾何学的な理論として再解釈することを提案した。また Bah と Heidmann [2, 3] は、5 次元 Einstein–Maxwell 理論において、滑らかな地平面なしの「トポロジカル星」を構成し、その撮像特性は Ref. [4] で解析

* https://www.bttp.info/

された。

これらの天体の現象論は、すでに相当な文献群を形成している。本稿はそれを重複して再現するのではなく、その上に構築する。スカラー準固有振動とそれに伴うキャビティ効果は Ref. [5] で計算され、次元還元された 4 次元解の電磁摂動および重力摂動は Refs. [9, 10] で研究された。また、動径摂動および非動径摂動のもとでの安定性は Refs. [6, 7, 8] で解析されている。本稿の寄与は、この文献群とは直交するものである。すなわち、トポロジカル星部門を、単一のトーション付き高次元作用に基づく四相互作用の候補的統一理論の中に埋め込み、既知の解が拡張理論においても厳密解であり続ける条件を導出し（§6 のトーション分離補題）、パリティの破れ、暗黒物質、内部整合性について、統一枠組みの水準で初めて見える全体的帰結を引き出す。

本 v2.1 では、v1 に含まれていたすべての数学的不整合、すなわちゲージ不変でない拡張計量、階数の異なる微分形式を混合した計量仮定、時間反転に関する誤った不等式を撤回し、修正する。

1.2 目的

(1) ゲージ不変性が定理として成立する単一作用の構成。(2) トーションと Holst 型項によるパリティ破れの幾何学化。(3) 地平面なしトポロジカル星が完全作用の厳密解であることを証明し、その観測的帰結を解析的に整理し、既存文献の中に位置づけること。(4) 既存データ（EHT、LIGO–Virgo–KAGRA、LHC、マイクロレンズ観測）との照合により、生き残るパラメータ領域を同定すること。

1.3 基本仮定

(i) 物理法則は、トーションを備えた $(4+d)$ 次元幾何の単一作用から導かれる（§2）。(ii) ゲージ場は内部空間の等長変換群として実現される。(iii) カイラリティと安定性は、内部空間のトポロジカル欠陥構造に由来する。

2 統一幾何作用

2.1 基本公理と全作用

すべての場の方程式は、計量 G_{MN} と、トーション $\mathcal{T}^P{}_{MN} = \Gamma^P{}_{[MN]}$ をもつ独立接続を備えた $(4+d)$ 次元多様体 $\mathcal{M}_{4+d}$ 上の単一作用から導かれる：

$$S = \frac{1}{2\kappa_{4+d}^2}\int d^{4+d}X\sqrt{-G}\Big[R(G,\mathcal{T}) + \frac{1}{\beta}\varepsilon^{MNPQ}{}_{R_1\cdots R_d}R_{MNPQ}\,\sigma^{R_1\cdots R_d} - 2\Lambda_{4+d}\Big] + \int d^{4+d}X\sqrt{-G}\,\frac{i}{2}\Big[\bar\Psi\Gamma^M\overrightarrow{D}_M\Psi - \bar\Psi\overleftarrow{D}_M\Gamma^M\Psi\Big] + (\text{非最小項}), \tag{1}$$

ここで $R(G,\mathcal{T})$ はトーションをもつ接続の曲率スカラー、β は Barbero–Immirzi パラメータ、σ は $4+d$ 次元におけるパリティ奇の Holst 型不変量を定義する共変一定の内部体積形式、D_M は完全接続によるスピノル共変微分である。基本的な Yang–Mills 項は現れない。ゲージ場は幾何から抽出されるのであり、追加されるのではない。次元の確認（$\hbar = c = 1$）：$[G_{MN}] = 0$, $[R] = M^2$, $[\kappa_{4+d}^2] = M^{-(2+d)}$, $[\Lambda_{4+d}] = M^2$, $[\Psi] = M^{(3+d)/2}$, $[\beta] = [\sigma] = 0$ であり、すべての項は無次元である。

2.2 内部幾何としてのゲージ場

v1 の仮定 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa_E A_\mu A_\nu + \kappa_S \sum_a G^a_\mu G^a_\nu$ は撤回される。$A_\mu A_\nu$ はゲージ不変ではなく、観測可能な幾何量に現れることはできない。これに代えて、$\mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}_d$ 上のカルツァ＝クライン仮定を用いる：

$$ds^2_{4+d} = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + \gamma_{mn}(y)\big[dy^m + K^m_a A^a_\mu dx^\mu\big]\big[dy^n + K^n_b A^b_\nu dx^\nu\big], \tag{2}$$

ここで γ_{mn} はコンパクト空間 $\mathcal{K}_d$ の計量、K^m_a はその Killing ベクトルであり、$[K_a, K_b] = f^c{}_{ab}K_c$ を満たす。ゲージ不変性は定理である。$y^m \to y^m + \epsilon^a(x)K^m_a(y)$ のもとで、次の変換を行うとき、かつそのときに限り、仮定は同じ形を保つ：

$$A^a_\mu \to A^a_\mu - \partial_\mu \epsilon^a - f^a{}_{bc}\epsilon^b A^c_\mu, \tag{3}$$

これはまさに非可換ゲージ変換である。したがって G_{MN} のすべての不変量は厳密にゲージ不変となる。次元還元により、

$$S_{4D} \supset \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R_4}{2\kappa_4^2} - \frac{1}{4g_a^2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{moduli}}\Big], \qquad \frac{1}{g_a^2} = \frac{1}{\kappa^2_{4+d}}\int_{\mathcal{K}_d}\sqrt{\gamma}\,\gamma_{mn}K^m_a K^n_a, \tag{4}$$

が得られる。したがって κ_E, κ_S は不要となり、結合定数は内部幾何により、$g_a^2 \sim \kappa_4^2/R_a^2$ として定まる。$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を等長変換として実現するには $d \geq 7$ が必要である [11]。ここでは $d = 7$ を採用する。

2.3 トポロジカル部門と強い相互作用

第二 Chern 数 $\mathcal{C} = \frac{1}{32\pi^2}\int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})d^4x \in \mathbb{Z}$ は、高次元トポロジカル項から降りてくる $S_\theta = \theta\,\mathcal{C}$ を通して作用に入る。v1 からの修正点は次の通りである。(i) $\mathcal{C}$ はそれ自体では色の閉じ込めを生まない。閉じ込めは依然として予想であり、本稿では主張しない。(ii) トポロジカル部門が定量的に支配するのはトポロジカル感受率であり、Witten–Veneziano 関係 [17] を通して η' 質量を支配する。この点がここで検証可能な内容である。

2.4 漸近的自由性

$g_s^2(Q^2)$ の一ループの走りは保持されるが、再解釈される。g_a^{-2} は $\mathcal{K}_d$ のモジュラスであるため、RG 流はモジュラス有効作用のスケール依存性である。この枠組みから $(33 - 2n_f)/12\pi$ を導出することは未解決である（OP8)。

3 フェルミオン、還元、カイラリティ

3.1 定理としての統一共変微分

$(4 + d)$ 次元 Dirac 演算子を §2.2 に従って還元すると、$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b + A^a_\mu \hat{T}_a +$（コンタ－ション）が自動的に現れる。スピン接続とゲージ接続の統一は仮定ではなく帰結である。

3.2 カイラル障害と欠陥

滑らかな Riemann 型コンパクト化からは 4 次元のカイラル・スペクトルは得られない [12]。したがって内部空間 $\mathcal{K}_7$ は欠陥（錐状またはオービフォールドの軌跡）をもつ。カイラル零モードはそこに局在し、$n_L - n_R = \mathrm{index}(D_\mathcal{K})$ は欠陥配置のトポロジカル不変量となる。標準模型のカイラリティはこの意味でトポロジカルな性質であり、三世代を与える具体的構成は未解決である（OP5）。

4 幾何学的パリティ破れ

4.1 v1 のカイラル計量の撤回

v1 の線素は、階数 2 の二次形式に階数 3 の形式を加えており、幾何学的対象として整合していなかったため撤回する。パリティ破れはトーションに符号化される。

4.2 トーション分解と Holst 部門

$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}(g_{\lambda\mu}V_\nu - g_{\lambda\nu}V_\mu) + \frac{1}{6}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}S^\rho + q_{\lambda\mu\nu}$ と分解する。最小結合だけでは、$\propto -\kappa^2 J_5\!\cdot\! J_5$ のパリティ偶の接触項しか生じない。真正のパリティ破れは、Holst 項（$1/\beta$）と非最小結合 α により生じる。トーションを積分消去すると [13]、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -\frac{3\kappa_4^2}{16}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}\Big[J_5^\mu J_{5\mu} - \frac{2\alpha}{\beta}J_5^\mu J_\mu + \alpha^2 J^\mu J_\mu\Big], \tag{5}$$

を得る。この交差項はパリティ奇であり、$\chi - 1 \propto \alpha/\beta$ を与える。限定条件は次の通りである。(i) これはパリティを破る接触項を与えるが、完全な $V - A$ 構造を与えるものではない。その構造は §3.2 の欠陥局在モードに由来する。(ii) これらの項は重力的に抑制されている。弱い相互作用の結合強度は $SU(2)$ 等長変換部門から生じる。

4.3 時間の向き（修正）

v1 で示した $\tau \to -\tau$ の下での不等式は誤りであった。自己平行方程式の両項は固有時反転の下で偶である。修正後の主張は次である。§4.2 の相互作用は P を破るが T を保存する。CPT により、T の破れには CP の破れ（CKM 位相、および可能性として θ）が必要である。残る主張は、弱い相互作用部門が CP、したがって T の破れを示す唯一の観測済み部門であるという点である。巨視的な時間の矢との関係は、§8.3 の動機的な予想へ格下げされる。

5 暗黒部門

5.1 同一作用のソリトンとしての暗黒物質

作用は §6 の地平面なしソリトンを古典解として許すため、暗黒物質はそれらの集団としてモデル化される：$\rho_{DM}(x) = \sum_i n_i(x)M_i$, $M_i = M_{\mathrm{ADM}}[\mathrm{soliton}_i]$。

5.2 真空エネルギー（位置づけの明確化）

トポロジーについての和 $\rho_\Lambda = l_P^{-4} \sum_{\text{topologies}} e^{-S_E}$ は形式的表現としてのみ保持する。Euclid 重力経路積分はそのままでは収束せず、Λ の大きさについてはいかなる主張もしない（OP12）。

5.3 暗黒エネルギーと暗黒物質の関係（置換）

v1 の関係 $\rho_{DE} \propto \nabla^2 \rho_{DM}$ は、観測される暗黒エネルギーの滑らかさと矛盾する。これに代えて、

$$\rho_{DE}(x) = \rho_\Lambda + \frac{\xi}{M_P^2} \nabla_\mu \nabla^\mu \rho_{DM}(x), \qquad |\xi| \ll \frac{\rho_\Lambda M_P^2}{|\nabla^2 \rho_{DM}|_{\text{gal}}}, \tag{6}$$

を採用する。これは次元的に整合し（$[\xi] = 0$）、暗黒エネルギーのクラスタリング制限によって反証可能である。

6 地平面なしコンパクト天体としてのトポロジカル・ソリトン

6.1 埋め込みとトーション分離

補題 1 (トーション分離)**.** スピノル場が消えている配置では、*§2.1* のトーション場方程式は代数的であり、$\mathcal{T} = 0$ を強制する。トーションなし配置では、*Holst* 型項は第一 *Bianchi* 恒等式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}(g) = 0$ により恒等的に消える。したがってボソン配置では、場の方程式は *Einstein* 重力とカルツァ＝クライン・ゲージ部門に正確に還元される。

証明の概略. トーションは微分を含まない。その運動方程式はコンターションをスピン密度に代数的に等置し、$\Psi = 0$ では消える。$\mathcal{T} = 0$ では接続は Levi-Civita 接続となり、パリティ奇不変量は $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ に帰着する。 □

この補題こそが、Refs. [2, 3] のトポロジカル星、ひいては Refs. [4, 5, 6, 7, 8] の現象論的結果が、§2 の統一理論にそのまま継承される正確な意味である。最小の整合的切断として、5 次元 Einstein–Maxwell 理論 $S_5 = \int d^5x \sqrt{-g}[R/2\kappa_5^2 - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN}]$ を用いる。埋め込みの微妙な点も明記しておく。F を重力光子として幾何化する場合、還元は一般にラジオン結合 $e^{-a\phi} F^2$ を生み、解は安定化された枝でのみそのまま成立する。そのような切断は超重力に存在する [3] が、一般問題は OP6 である。

6.2 厳密解

Refs. [2, 3] に従い、$\mathcal{M}_4 \times S_y^1$ 上で、

$$ds_5^2 = -f_S dt^2 + f_B dy^2 + \frac{dr^2}{f_S f_B} + r^2 d\Omega_2^2, \quad F = P \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi, \quad f_{S,B} = 1 - \frac{r_{S,B}}{r}. \tag{7}$$

直接計算により $R^t{}_t = R^y{}_y = -r_S r_B / 2r^4$ が得られ、場の方程式は次のとき、かつそのときに限り満たされる：

$$P^2 = \frac{3 r_S r_B}{2\kappa_5^2}. \tag{8}$$

$r_S \leftrightarrow r_B$ 対称性は、ブラック・ストリング枝（$r_S > r_B$）と、ここで扱う地平面なし枝（$r_B > r_S$）を交換する。

6.3　滑らかさ

$r_B > r_S$ の場合、時空は $r = r_B$ で終端する。$u = r - r_B$、$\rho = 2r_B\sqrt{u/(r_B - r_S)}$ とおくと、(r, y) 計量は $d\rho^2 + \rho^2 \frac{r_B - r_S}{4r_B^3} dy^2$ となり、滑らかな原点となるための必要十分条件は

$$R_y = \frac{2r_B^{3/2}}{\sqrt{r_B - r_S}} \tag{9}$$

である。この幾何は全体に滑らかなバブルである。$r = r_B$ で葉巻型に閉じる構造を持ち、面積 $4\pi r_B^2$ の丸い S^2 にフラックス $\oint F = 4\pi P$ が通っている。地平面はなく（多様体上で $f_S > 0$）、曲率特異点もない（$r = 0$ は切除される）。Dirac 量子化 $eP = n/2$ により $r_S r_B$ は量子化される。したがって欠陥はトポロジカルに保護されており、これが題名における「位相欠陥」の正確な意味である。

6.4　電荷とコンパクト性

Harmark–Obers の規約 [14] では、$M_{\mathrm{ADM}} = \frac{2\pi R_y}{4G_5}(2r_S + r_B)$ である。$G_4 = G_5/2\pi R_y$ を用いる 4 次元観測者は、$r_s^{(4)} = 2G_4 M_{\mathrm{ADM}} = r_S + r_B/2$ を割り当てる。同値に、還元後に $G_4 = 1$ とおけば $M = (2r_S + r_B)/4$ となり、これはトポロジカル星の文献で用いられる規格化 [5] と同じである。したがって係数規約は整合している。

6.5　光子力学とシャドウ

$p_y = 0$ のヌル測地線は $V = f_S/r^2$ を見る。これは $r_{\mathrm{ph}} = \frac{3}{2}r_S$ で極値を持ち、r_B には依存しない。この規約は標準的なトポロジカル星の分割と一致する。**クラス I ／第 1 種**（準安定枝では $\frac{3}{2}r_S < r_B < 2r_S$）：唯一の光子殻はキャップ殻 $r = r_B$ であり、外側の Schwarzschild 型光子球は存在しない。したがって下のシャドウ比の式は適用されない。**クラス II ／第 2 種**（$r_S < r_B < \frac{3}{2}r_S$）：内側の安定殻が $r = r_B$ にあり、外側の不安定光子球が $\frac{3}{2}r_S$ にあり、$b_{\mathrm{ph}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_S$ である。この二分法は、Ref. [4] で撮像特性が研究された二つの領域と一致する。本稿の寄与は、その 4 次元質量に対するシャドウ直径の帰結を次のコンパクトな式で表す点にある：

$$\frac{b_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{sol}}}{b_{\mathrm{ph}}^{\mathrm{Schw}}} = \frac{r_S}{r_S + r_B/2} \in \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{3}\right), \tag{10}$$

すなわち同じ質量のブラックホールより 33–43% 小さい。地平面がないため、キャビティ往復時間 $\Delta t_{\mathrm{echo}} = 2\int_{r_B}^{r_{\mathrm{ph}}} dr/[f_S\sqrt{f_B}]$ は有限である。

6.6　キャビティ横断時間の解析評価

これらの幾何のスカラー準固有振動は、内部領域に伴うキャビティ効果を含めて、Ref. [5] で数値的に計算されている。本小節の目的はそれと相補的である。すなわち、集団レベルおよびオーダー評価に有用なキャビティ横断時間の解析的見積もりを閉形式で与える。$x = r/r_S$、$b = r_B/r_S \in (1, \frac{3}{2})$

とすると、$\Delta t_{\rm echo} = 2r_S I(b)$、$I(b) = \int_b^{3/2} \frac{x^{3/2}dx}{(x-1)\sqrt{x-b}}$ である。置換 $x = b + u^2$ により被積分関数は滑らかになる。Simpson 求積は、arctan 核の解析分離と照合し、有効数字 4 桁で一致した。$r_S = 2GM/(1+b/2)$ を用いて、単位 GM/c^3 で表すと次の表を得る：

b	$I(b)$	$\Delta t_{\rm echo}\,[r_S]$	$\Delta t_{\rm echo}\,[GM/c^3]$
1.05	13.28	26.56	34.8
1.10	9.006	18.01	23.2
1.20	5.723	11.45	14.3
1.30	3.958	7.92	9.60
1.40	2.511	5.02	5.91
1.45	1.703	3.41	3.95

漸近形は $\Delta t_{\rm echo} \to \frac{8\pi}{3}\frac{GM}{c^3}(b-1)^{-1/2}$（Planck スケール表面を持つ ECO モデルの対数発散とは対照的なべき発散）および $\Delta t_{\rm echo} \to 16.8\frac{GM}{c^3}\sqrt{3/2-b}$ である。近似式は

$$\Delta t_{\rm echo} \simeq 11.7\,\frac{GM}{c^3}\sqrt{\frac{3/2-b}{b-1}} \qquad (\lesssim 2\%,\ 1.05 \le b \le 1.45). \tag{11}$$

である。スケールとしては、$60\,M_\odot$ の残骸で 1.7–10 ms、Sgr A*で 1–12 分となる。$T_{\rm QNM} \simeq 16.8\,GM/c^3$ であるため、一般的な遅延（4–35 GM/c^3）はリングダウン 1 周期程度である。したがって一般的なクラス II ソリトンは、明確に分離したエコー列を生むのではなく、$\Delta f \sim 1/\Delta t_{\rm echo}$（$b = 1.2$、$60\,M_\odot$ で約 240 Hz）の間隔をもつ修正された準固有振動スペクトルを生む。この結論は、単一光子球をもつトポロジカル星の準固有振動スペクトルが同じ光子球をもつブラックホールに近く、キャビティによる修正を受けるという Ref. [5] の数値的発見と整合し、独立に裏付けられる。分離したエコーには $b-1 \lesssim 10^{-3}$ が必要である。ただし、これは幾何光学的なヌル横断時間の見積もりであり、波動効果による $O(1)$ の補正を受ける。

6.7 情報と安定性

この時空は $\mathbb{R}^2 \times S^2$ の Cauchy 面を持つ大域的双曲時空であり、地平面を持たない。量子時間発展は標準的な意味でユニタリであり、パラドックスは解決されるというより、そもそも発生しない。制限として、動的形成と Bekenstein–Hawking エントロピーに対するミクロ状態数え上げは未解決である（OP10）。古典的安定性については、v2 の単純な読み方より状況はかなり良い。これらの解の動径安定性と非動径安定性は Refs. [6, 7, 8] で解析されており、パラメータ空間の広い領域で安定性が示されている。なお、完全な非線形解析は未解決である（OP9）。

7 既存データとの照合

7.1 重力波

(a) リングダウン分光。トポロジカル星のスカラー準固有振動は Ref. [5] で計算されている。単一光子球配置ではスペクトルはその光子球を共有するブラックホールに近く、内側安定光子球をもつ配置では長寿命のキャビティ・モードと、虚部が小さくなったブラックホール的モードが現れる。還元

された 4 次元解の結合した電磁・重力摂動は Refs. [9, 10] で研究されている。未解決であり、近い将来の具体的プログラムとなるのは、これらの計算済みスペクトル、および 5 次元幾何の完全な重力部門への拡張を、b の関数として LIGO–Virgo–KAGRA のリングダウン測定と系統的に照合することである（OP1）。既存のエコー探索（O1–O3、$\Delta t \sim 0.05$–1 s）は、§6.6 により $b-1 \lesssim 10^{-3}$ のみを制限する。**(b)** Kerr では $k_2 = 0$ であるのに対し、非零の潮汐 Love 数はインスパイラル位相を通して集団を制限する。変形能解析は Ref. [6] に存在し、それを LVK 制限へ翻訳することは OP1 の一部である。**(c)** 磁気的に荷電した成分は -1PN の双極放射を生み、強く制限される。中性連星はこれを回避する。

7.2 シャドウ：既存の排除

M87*および Sgr A*の EHT シャドウ直径は、力学的質量と比較して Kerr と約 10–20% の範囲で整合している [15]。したがって、クラス II の $\geq 33\%$ の欠損も、クラス I のシャドウ不在も排除される。**M87*と Sgr A*は、いかなる b に対しても、このクラスのソリトンではない。**理論が生き残るのは未撮像のコンパクト天体についてのみであり、将来の地平面スケール画像は同じ二分的検定を繰り返すことになる。

7.3 ソリトン暗黒物質

滑らかさは $R_y \geq 2r_B$ を与える。したがって余剰次元が巨視的でない限り、滑らかなソリトンは微視的である。TeV スケールの R_y では、$M \sim 10^{7\text{–}8}$ kg、すなわち $\sim 10^{-23}\,M_\odot$ となる。これはすべてのマイクロレンズ感度より下にある（Subaru–HSC の窓は $M \gtrsim 10^{-16} M_\odot$ のみを制限する）。また、衝突をほぼしない冷たい粒子であり、トポロジカルに安定である。したがって観測的に許される CDM 候補であり、残る課題は遺物存在量である（OP3）。v1 の擬等温プロファイルは経験的な当てはめへ格下げする。

7.4 衝突型加速器

$M_{KK} = \hbar c/R_y$ である。§2.2 が要求するように標準模型ゲージ場が y 方向に伝播するなら、LHC の共鳴探索は $M_{KK} \gtrsim \mathcal{O}(5\text{–}10)$ TeV、すなわち $R_y \lesssim 10^{-19}$ m を制限する。生き残る領域は TeV スケールの R_y であり、$10^{-23} M_\odot$ の暗黒物質スケールと整合する。

7.5 サイズ階層の緊張（率直な開示）

$R_y \geq 2r_B$（滑らかさ）と $R_y \lesssim 10^{-19}$ m（加速器制限）を合わせると、滑らかなソリトンはすべて素粒子以下の大きさに強制される。天体質量の模倣天体を得るには、$\mathbb{Z}_k$ オービフォールド商（km スケールの r_B に対して $R_y \geq 2r_B/k,\ k \sim 10^{25}$）か、歪んだ多重スケール内部幾何が必要である。しかし、いずれも本稿では構成しない（OP4）。理論は、暗黒物質と加速器に関係する微視的領域と、拡張を必要とする天体物理的領域に分岐する。この点を曖昧にするより、明示する方がよい。

7.6 反証可能な内容の要約

(1) シャドウ欠損 33–43%：すでに M87*と Sgr A*を排除する。(2) リングダウン・スペクトルは文献 [5, 9, 10] で計算されており、LVK との系統的照合を待つ（OP1)。キャビティ間隔は $\Delta f \simeq [11.7\,GM/c^3\sqrt{(3/2-b)/(b-1)}]^{-1}$。(3) 分離エコーは $b-1 \lesssim 10^{-3}$ の場合のみ。(4) 非零 Love 数。(5) TeV 以上の KK 共鳴。(6) $\sim 10^{-23} M_\odot$ のソリトン CDM。遺物存在量が決定的である。

8 結論、未解決問題、展望

8.1 確立された結果

(i) ゲージ不変性は定理である（§2.2)。(ii) $\chi - 1 \propto \alpha/\beta$ をもつ幾何学的パリティ破れは CPT と整合する（§4.2–4.3)。(iii) トーション分離補題により、トポロジカル星の文献は統一理論の中にそのまま埋め込まれる。(iv) 公表済み準固有振動計算と整合する解析的キャビティ横断式、およびシャドウ欠損窓 $(4/7, 2/3)$ が得られる。(v) 反証済み内容（M87*、Sgr A*）と、生き残る内容（微視的ソリトン暗黒物質）がともに非空である。

8.2 未解決問題

[C] は計算、[T] は構成、[F] は基礎問題を表す。**OP1** [C] Refs. [5, 9, 10, 6] を土台とする、5 次元幾何の重力部門 QNM スペクトルの完成と、LVK リングダウンデータとの系統的照合。**OP2** [C] 幾何光学近似を超えたエコー遅延（波動伝達関数)。**OP3** [T] $10^{-23} M_\odot$ ソリトンの遺物存在量。**OP4** [T] サイズ階層問題の解決。**OP5** [T] 明示的な $\mathcal{K}_7$ 欠陥配置からの三つのカイラル世代。**OP6** [T] モジュラス安定化。**OP7** [T] 欠陥モードからの $V-A$ 構造、およびトーション接触項に由来する EDM/原子パリティの残差。**OP8** [C] モジュラス有効作用からの $(33-2n_f)/12\pi$ の導出。**OP9** [T] Refs. [6, 7, 8] を拡張する完全非線形安定性。**OP10** [F] 動的形成とミクロ状態数え上げ。**OP11** [F] UV 完成。**OP12** [F] 収束する真空エネルギー計算。

8.3 展望

v1 から v2.1 への改訂は方法論的な点を明確にする。初稿は完成した統一を主張した。これに対し本稿は、より少なく主張することで、より多くを得る。すなわち、すべての方程式はゲージ不変性と次元の検査を通過し、すべての主張は導出されるか、文献に帰されるか、未解決問題として明示される。そして理論は、既存データによって部分的に排除されている（EHT）一方で、他の観測（エコー探索、QNM 計算）とは整合している。近い将来のプログラムは OP1 と OP3 である。弱い相互作用部門の時間向きと巨視的な時間の矢を結びつける予想は、動機としてのみ残す。その素朴な形は誤っていた（§4.3)。このような撤回を率直に一覧化することも、本稿の成果の一部である。

参考文献

[1] J. Lindgren, A. Kovacs, J. Liukkonen, J. Phys.: Conf. Ser. **2987**, 012001 (2025).

[2] I. Bah, P. Heidmann, "Topological stars and black holes," Phys. Rev. Lett. **126**, 151101 (2021).

[3] I. Bah, P. Heidmann, "Topological stars, black holes and generalized charged Weyl solutions," JHEP **09**, 147 (2021).

[4] P. Heidmann, I. Bah, E. Berti, "Imaging topological solitons: The microstructure behind the shadow," Phys. Rev. D **107**, 084042 (2023) [arXiv:2212.06837].

[5] P. Heidmann, N. Speeney, E. Berti, I. Bah, "Cavity effect in the quasinormal mode spectrum of topological stars," Phys. Rev. D **108**, 024021 (2023) [arXiv:2305.14412].

[6] M. Bianchi, G. Di Russo, A. Grillo, J. F. Morales, G. Sudano, "On the stability and deformability of top stars," JHEP **12**, 121 (2023) [arXiv:2305.15105].

[7] I. Bena, G. Di Russo, J. F. Morales, A. Ruipérez, "Non-spinning tops are stable," JHEP **10**, 071 (2024) [arXiv:2406.19330].

[8] A. Dima, M. Melis, P. Pani, "Nonradial stability of topological stars," Phys. Rev. D **111**, 104001 (2025) [arXiv:2502.04444].

[9] W.-D. Guo, Q. Tan, "Quasinormal modes of a charged black hole with scalar hair," Universe **9**(7), 320 (2023) [arXiv:2402.14265].

[10] W.-D. Guo, Q. Tan, Y.-X. Liu, "Gravitoelectromagnetic coupled perturbations and quasinormal modes of a charged black hole with scalar hair," Phys. Rev. D **107**, 124046 (2023) [arXiv:2212.08784].

[11] E. Witten, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981).

[12] E. Witten, "Fermion quantum numbers in Kaluza–Klein theory," in *Shelter Island II*, eds. R. Jackiw, N. N. Khuri, S. Weinberg, and E. Witten, MIT Press (1985).

[13] L. Freidel, D. Minic, T. Takeuchi, Phys. Rev. D **72**, 104002 (2005).

[14] T. Harmark, N. A. Obers, JHEP **05**, 043 (2004).

[15] Event Horizon Telescope Collaboration, ApJL **875**, L1 (2019); ApJL **930**, L12 (2022).

[16] V. Cardoso, P. Pani, Living Rev. Relativ. **22**, 4 (2019).

[17] E. Witten, Nucl. Phys. B **156**, 269 (1979); G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159**, 213 (1979).